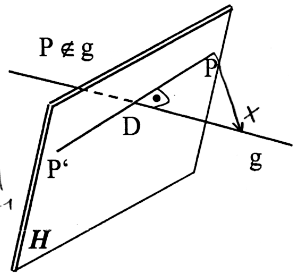
2.2 Punkt und Gerade

- **$P \in g$** $\Rightarrow d(P;g) = 0$ $\quad$ $P(-1/-4/3)$ $\quad$ $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad$ $P \in g \Rightarrow d(P;g) = 0$

- **$P \notin g$** $\Rightarrow d(P;g) \neq 0$ $\quad$ $P(6/2/-2)$ $\quad$ $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$



Berechnung des Abstands:
Hilfsebene H mit $H \perp g \wedge P \in H \Rightarrow \vec{n}_H = \vec{u}_g$
$H:\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 18 = 0$
$H \cap g = \{D\}$: $2(2+2\mu) + 2(1+2\mu) - (-3-\mu) - 18 = 0 \Rightarrow \mu = 1$
$\Rightarrow D(4/3/-4)$ und $d(P;g) = d(P;D) = \ldots = 3$

oder $\vec{XP} \circ \vec{u} = 0$
$\begin{pmatrix}2+2\mu-6\\1+2\mu-2\\-3-\mu+2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = 0$
$\Rightarrow \ldots\ \mu = 1$ $\quad$ $d = |\vec{XP}|$ mit $\mu = 1$

- **$P \underset{g}{|} P'$** Spiegelung von P an g $\quad$ $P(6/2/-2)$ $\quad$ $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

(Hilfsebene H mit $H \perp g \wedge P \in H \Rightarrow \vec{n}_H = \vec{u}_g$) ... $\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PD}$ $\quad \Rightarrow P'(2/4/-6)$
oder Methode von oben mit $D = X(\mu = 0)$

2.3 Zwei Geraden

- **$g \equiv h$** $\quad$ $g:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$, $h:\ \vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ $\quad$ $B \in g$ und $A \in h$ und $\vec{u} = \sigma \cdot \vec{v}$

- **$g \cap h = \{S\}$** $\quad$ $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}19\\40\\-8\end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow S(1/2/1)$

- **Winkel zwischen zwei Geraden** $\quad \cos\varphi = \dfrac{\vec{u}_g \cdot \vec{u}_h}{|\vec{u}_g| \cdot |\vec{u}_h|}$

- **Winkelhalbierende Geraden w_1, w_2** zu g und h: $w_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}23\\38\\-4\end{pmatrix}$ $\quad$ $w_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

- **$g \parallel h$** $\quad$ $g:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$, $h:\ \vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ $\quad$ $\vec{u} = \sigma \cdot \vec{v}$

Berechnung des Abstands: d(g;h) $\quad$ $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\ h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

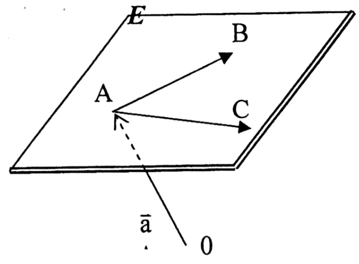
Hilfsebene H mit $H \perp g \wedge A \in H \Rightarrow \vec{n}_H = \vec{u}_g$ $\quad \Rightarrow H:\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
$H \cap h = \{S\}$ $\quad \Rightarrow 2 + \mu + 2(1 + 2\mu) - (-2 - \mu) = 0 \quad \Rightarrow 6\mu = -6 \quad \Rightarrow \mu = -1 \quad \Rightarrow S(1/-1/-1)$
$d(g;h) = d(A;S) = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}$

alternativ: $d = d(A;h) = d(B;g)$ s.o.

3. *Ebene* eindeutig festgelegt durch

- **drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen:** $A(a_1/a_2/a_3)$, $B(b_1/b_2/b_3)$, $C(c_1/c_2/c_3) \wedge A \notin BC$

  E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) + \mu(\vec{c} - \vec{a})$

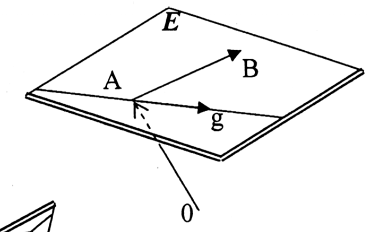


- **einen Punkt und zwei linear unabhängige Richtungen:** $A(a_1/a_2/a_3)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$

  E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

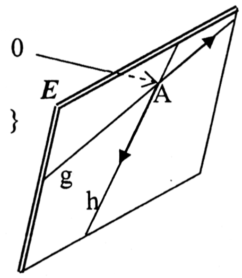
- **einen Punkt und eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält:** $B(b_1/b_2/b_3)$ g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ $B \notin g$

  E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu(\vec{b} - \vec{a})$



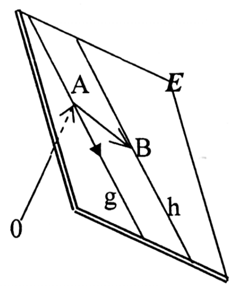
- **zwei sich schneidende Geraden:** g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$, h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ $g \cap h \neq \{\ \}$

  E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$



- **zwei (echt) parallele Geraden:** g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$, h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{u}$ $g \cap h = \{\ \}$

  E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu(\vec{b} - \vec{a})$



3.1 Verschiedene Darstellungsformen von Ebenen

- **Parameterform** **PF** **PF(E):** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- **Normalenform** **NF**

  $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$**NF(E):** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$

- **Koordinatenform** **KF**

  Skalarprodukte von NF(E) berechnen $\Rightarrow$ **KF(E):** $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$

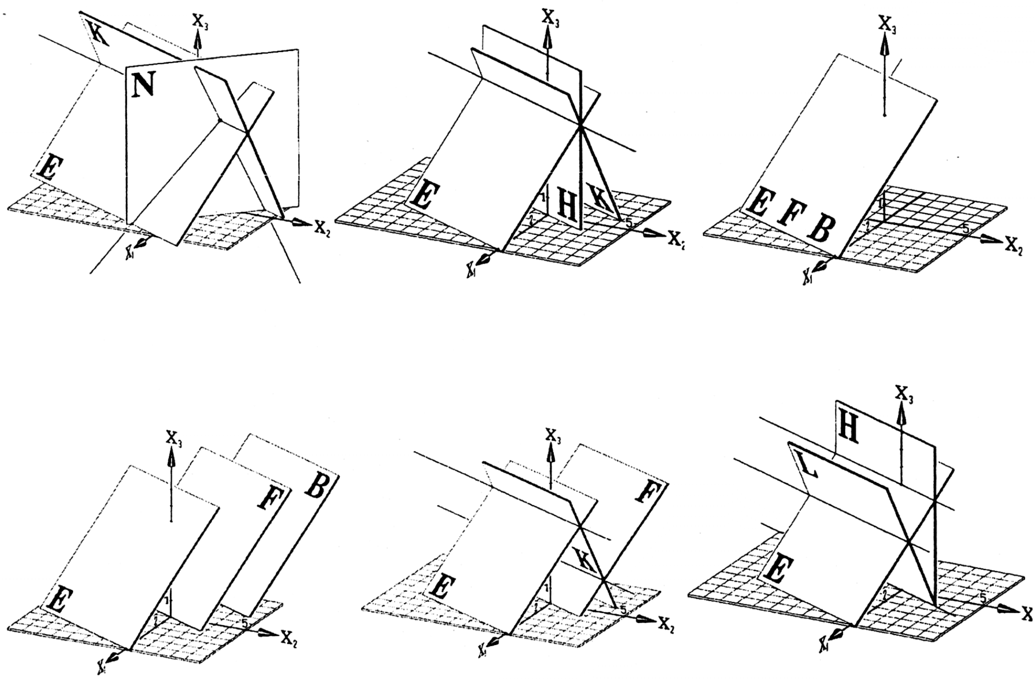
- **Achsenabschnittsform** **AAF**

  Durch Umformung aus KF(E) erhält man **AAF(E):** $\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{3} = 1$

  Mit den Achsenabschnitten: $S_{x1}(3/0/0)$ $S_{x2}(0/6/0)$ $S_{x3}(0/0/3)$

3.2 Besondere Lage von Ebenen im Koordinatensystem

- $E \parallel x_1 \ \widehat{=}\ E \perp E_{x2x3}$ $(\mathbf{0x_1} +)2x_2 - 5x_3 + 2 = 0$ analog $\parallel x_2$- bzw. $\parallel x_3$-Achse
- $E \perp x_1 \ \widehat{=}\ E \parallel E_{x2x3}$ $x_1 (+ \mathbf{0x_2} + \mathbf{0x_3}) - 4 = 0$ analog $\perp x_2$- bzw. $\perp x_3$-Achse
- Grundsätzlich mögliche Lagen dreier Ebenen zueinander



Beispiele:

a) E: $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3$ F: $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ G: $x_1 - x_2 - 3x_3 = -8$

b) E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ F: $3x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 34$ G: $-3x_2 + 2x_3 = 30$

c) E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ F: $4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8$ G: $-3x_1 - 1{,}5x_2 - 3x_3 = -6$

d) E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ F: $2x_1 - x_2 - x_3 = 3$ G: $3x_1 + x_3 = 2$

3.3 Punkt und Ebene

- **$P \in E$** $\Rightarrow d(P;E) = 0$ P(1/4/-3) E: $2x_1 - x_2 + x_3 = -5$
- **$P \notin E$** $\Rightarrow d(P;E) \neq 0$ P(2/3/-4) E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9$

Berechnung des Abstands: HNF(E): $\frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 + 2x_3) - 3 = 0$

P in HNF: $\frac{1}{3}(2 - 6 - 8) - 3 = \boldsymbol{d}$ $\boldsymbol{d = -7}$ **„-" ⇒ P liegt im selben Halbraum bezüglich E wie der Koordinatenursprung**

$d(P;E) = |d| = 7$

Neue Methode nach neuem Lehrplan

- **$P \underset{E}{|} P'$** Spiegelung von P an E

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot(-d)\cdot\vec{n}^\circ = \begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} + 2\cdot(-(-7))\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20/3\\-19/3\\16/3\end{pmatrix}$$

- Lot ℓ durch P auf E

$\ell: \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

- $\ell \cap E = \{$ Fußpkt F $\}$

$(2+\lambda) - 2(3-2\lambda) + 2(-4+2\lambda) = 9 \Leftrightarrow \lambda = 7/3$

Schneller $\vec{f}$

$\overrightarrow{PF} = (\vec{p} + \lambda\vec{n}) - \vec{p} = \lambda\vec{n}$

$d = |\overrightarrow{PF}| = |\lambda\vec{n}| = |\lambda|\cdot|\vec{n}|$

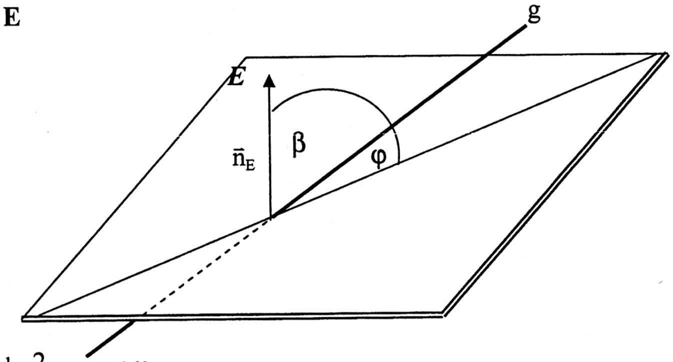
$= \frac{7}{3}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2} = \frac{7}{3}\cdot 3 = \underline{\underline{7}}$

3.4 Gerade und Ebene

- **$g \subset E$** $\Rightarrow d(g; E) = 0$ $\quad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ $\quad E\colon 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0$ „4=7" parallel „0=0"

- **$g \cap E = \{S\}$** $\Rightarrow d(g; E) = 0$ $\quad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ $\quad E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \Rightarrow S(1/2/1)$ „λ = 2"

- **Schnittwinkel φ zwischen g und E**



$\sphericalangle(g; E)$: $\quad \cos\beta = \dfrac{\vec{u}_g \cdot \vec{n}_E}{|\vec{u}_g| \cdot |\vec{n}_E|}$

mit $\cos\beta = \sin(90° - \beta) = \sin\varphi$

folgt: $\sin\varphi = \dfrac{\vec{u}_g \cdot \vec{n}_E}{|\vec{u}_g| \cdot |\vec{n}_E|}$

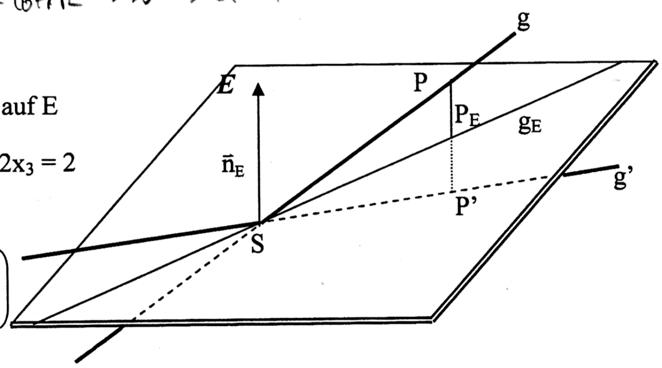
$$\sin\varphi = \frac{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \Rightarrow \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{2}{15}\right) \approx 7{,}66°$$

- **$g \parallel E$** $\Rightarrow d(g; E) \neq 0$

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad E\colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2$

Berechnung des Abstands:
~~Beliebiger Punkt von g in HNF(E)!~~ $l \cap E \to \lambda \to d = |\lambda| \cdot |\vec{n}|$

- **$g \perp E$** $\Rightarrow \vec{u}_g = \vec{n}_E$
- **g_E** senkrechte Projektion von g auf E



$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ $\qquad E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$

$g \cap E = \{S\} \quad \Rightarrow S(1/2/1)$

$l\colon l \perp E \wedge P \in l \quad l\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$l \cap E = \{P_E\} \quad \Rightarrow P_E\left(\frac{32}{9}/\frac{56}{9}/\frac{5}{9}\right)$

$g_E = SP_E \qquad \Rightarrow g_E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma'\begin{pmatrix}23/9\\38/9\\-4/9\end{pmatrix} \qquad g_E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}23\\38\\-4\end{pmatrix}$

- **$g \,|_E\, g'$** Spiegelung von g an E

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ $\qquad E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$ $\qquad g \cap E = \{S\} \quad \Rightarrow S(1/2/1)$

$l\colon l \perp E \wedge P \in l \quad l\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\qquad l \cap E = \{P_E\} \quad \Rightarrow P_E\left(\frac{32}{9}/\frac{56}{9}/\frac{5}{9}\right)$

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PP_E} \qquad \Rightarrow P'\left(\frac{28}{9}/\frac{58}{9}/\frac{1}{9}\right)$ $\qquad g'\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}19\\40\\-8\end{pmatrix}$

3.5 Zwei Ebenen

➢ **E ≡ F** Die KF(E) ist ein Vielfaches von der KF(F)

➢ **E ∩ F = g** E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ F: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

E in F: $-2(3 + 3\lambda + 2\mu) + (1 - \lambda + \mu) + 2(2 + 2\lambda) - 2 = 0$ $\quad -3\lambda - 3\mu - 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1 - \mu$ in E eingesetzt erhält man gs: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - (1 + \mu)\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

gs: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$

oder: E: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 12 = 0$ $\quad \Rightarrow x_1 = 12 - 2x_2 - 4x_3$ in F:

F: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0$ $\quad -15x_2 - 20x_3 + 60 = 0 \Rightarrow x_3 = 3 - 0{,}75x_2$

Jetzt ist x_2 frei wählbar, z.B.: $x_2 = 4\mu \Rightarrow x_3 = 3 - 3\mu \quad x_1 = 4\mu \Rightarrow$ gs: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$

oder: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-6\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

$-6\sigma + 2\tau - \lambda = -4 - \mu$

$\sigma + \tau - 2\lambda = 3 + 2\mu$ Lösung mit z.B. Gaußschen Algorithmus

$\sigma - \tau = 2 + 3\mu$

$\Rightarrow \lambda = -2 - 3\mu$ in F eingesetzt ergibt sich: gs: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-4\\-4\\3\end{pmatrix}$

➢ **E || F** Die Koordinatenformen von E und F unterscheiden sich nur durch das konstante Glied.