

4. Aufgaben zum exponentiellen Wachstum und Zerfall

1. Wenn man ein Kapital über lange Zeit anlegt, werden am Ende jedes Jahres die Zinsen »zum Kapital geschlagen« und im nächsten Jahr ebenfalls verzinst. Man spricht dann bekanntlich von **Zinseszins**.*
 - a) Die Vermehrung eines Kapitals K_0 um den Zins Z im Laufe eines Jahres kann man als Multiplikation von K_0 mit einem Faktor $q > 1$ beschreiben. Wie wird dieser Faktor aus dem Zinssatz $p\%$ berechnet?
 - b) Auf welchen Wert K_n wächst K_0 beim Zinssatz $p\%$ in n Jahren an? Was ergibt sich speziell für
 - 1) $K_0 = 1000$ DM, $p = 4\%$, $n = 5$
 - 2) $K_0 = 1000$ DM, $p = 4\%$, $n = 10$
 - 3) $K_0 = 1000$ DM, $p = 8\%$, $n = 5$?
 - c) Um wieviel Prozent seines Anfangswertes wächst ein Kapital
 - 1) bei 10% in 5 Jahren; 2) bei 5% in 10 Jahren;
 - 3) bei 10% in 10 Jahren?
 - d) 2500 DM werden zu $5,5\%$ angelegt. Der Anleger möchte erreichen, daß sein Guthaben auf 10000 DM anwächst! Wieviel Jahre würde das (ungefähr) dauern? Nach welcher Zeit hat sich das Kapital (ungefähr) verdoppelt?
 - e) Löse Aufgabe d) für $p = 8\%$.
2. Das Wachstum einer Pilzkultur verläuft unter gleichbleibenden Bedingungen nach einer Exponentialfunktion. In einem bestimmten Fall gelte für die aus 1 g Pilzsubstanz in x Tagen entstandene Masse y g das Wachstumsgesetz $y = 2^{0,25x}$. Nach wieviel Tagen hat sich die Masse verdoppelt bzw. vervierfacht bzw. verachtfacht?
3. Bei der Entladung eines Kondensators über einen Widerstand nimmt die Stromstärke I nach einer Exponentialfunktion ab. In einem speziellen Fall sei $I = 0,38 \text{ A} \cdot 10^{(-162/s)t}$, wobei t die seit Beginn der Entladung verstrichene Zeit bedeutet. Nach welcher Zeit ist die Stromstärke auf 1% bzw. auf 1% ihres Anfangswertes gesunken?
4. Das mit der Basis $\frac{1}{2}$ geschriebene Zerfallsgesetz für das radioaktive Element Radium 223 lautet: $N(t) = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{(0,086/d)t}$. Dabei ist N_0 die Zahl der zur Zeit $t = 0$ und $N(t)$ die Zahl der zur Zeit t vorhandenen Radiumatome.
 - a) Nach wieviel Tagen ist die Hälfte der anfangs vorhandenen Atome zerfallen (sog. Halbwertszeit)?
 - b) Wieviel Promille der Radiumatome sind nach 100 Tagen noch vorhanden?
5. Beim Element Radium 226 beträgt die Halbwertszeit 1620 Jahre.
 - a) Bestimme den Wert von c im Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 2^{ct}$ für Radium 226.
 - b) Wieviel Prozent einer Menge von Radium 226 sind
 - 1) nach 1000 Jahren 2) nach 2000 Jahren 3) nach 10000 Jahren noch vorhanden?
6. Im Jahre 1825 betrug die durchschnittliche wöchentliche Arbeitszeit der deutschen Arbeiter 82 Stunden! Die seitherige Entwicklung dieser Arbeitszeit wird näherungsweise durch die Funktion $x \mapsto T(x) = 82 \cdot 0,9955^{x-1825}$ beschrieben;* dabei bedeutet x die Jahreszahl und $T(x)$ die Anzahl der wöchentlichen Arbeitsstunden.
 - a) Welche Arbeitszeit ergibt sich danach für die Jahre 1875, 1960, 1980? (Die erhaltenen Werte stimmen gut mit den statistisch ermittelten überein.)
 - b) Welche Arbeitszeit ergäbe sich daraus für das Jahr 2000? Erscheint sie dir realistisch?
7. In einem Zeitungskommentar zum Weltbevölkerungsbericht 1990 der UNO heißt es: »Heute leben 5,3 Milliarden Menschen auf der Erde, im Jahre 2000 werden es weit über 6 Milliarden sein.«*
 - a) Bei wieviel Promille jährlicher Zunahme würde die Weltbevölkerung bis zum Jahre 2000 auf 6,0 Milliarden anwachsen?
 - b) Es gibt Länder mit besonders hoher Wachstumsrate; z. B. betrug sie nach dem UNO-Bericht im Irak $3,4\%$ pro Jahr. Wieviel Menschen würden im Jahre 2000 auf der Erde leben, wenn diese Rate weltweit gültig wäre?