Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall

Funktionen der Form $t \mapsto a \cdot b^t$ eignen sich zur Beschreibung exponentieller Wachstumsprozesse ($b > 1$) oder Abnahmeprozesse ($0 < b < 1$) in Abhängigkeit von der Zeit t.
Dabei gibt die Konstante a den Anfangsbestand an.

1. Wachstumsfunktion

Eine Bakterienkultur wächst kontinuierlich. Sie enthielt zu Beginn um 8 Uhr eine Individuenzahl von 2000 und später um 12 Uhr von 23000.

- Aus der Anfangsbedingung für den Zeitpunkt 8 Uhr folgt:
  $f(0) = 2000 = a$.
- Die zweite Bedingung für den Zeitpunkt 12 Uhr ergibt:
  $f(4) = 23000 \quad \Leftrightarrow \quad 2000 \cdot b^4 = 23000 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt[4]{\frac{23000}{2000}} \approx 1{,}842$

Die Wachstumsfunktion lautet somit: $f(t) = 2000 \cdot 1{,}842^t$.
Der Bestand nimmt also stündlich um 84,2% zu.

2. Verdopplungszeit

Um eine anschauliche Vorstellung über die Veränderung des Bestands bei einem exponentiellen Wachstum zu vermitteln, wird statt des Wachstumsfaktors b oft die so genannte Verdopplungszeit angegeben. Sie ist die Zeit, in der sich der Bestand jeweils verdoppelt.

Für die Maßzahl T_V der Verdopplungszeit gilt:

$$f(T_V) = 2 \cdot f(0) \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b^{T_V} = 2 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad \ln(b^{T_V}) = \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad T_V \cdot \ln(b) = \ln(2)$$

Also: $$\boxed{T_V = \frac{\ln(2)}{\ln(b)}}$$

Im Beispiel: $T_V = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}842)} \approx 1{,}135$, die Kultur verdoppelt sich alle 1,135h = 1h 8min 6s.

3. Basiswechsel

In den Naturwissenschaften ist die Basis e sehr beliebt. Durch eine Stauchung/Streckung in Abszissenrichtung erreicht man ein Wachstumsgesetz mit der Basis e:

$$a \cdot b^t = a \cdot e^{ct} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(b^t) = \ln(e^{ct}) = ct \quad \Leftrightarrow \quad t \cdot \ln(b) = ct \quad \Leftrightarrow \quad c = \ln(b)$$

Also: $$\boxed{b^x = e^{x \cdot \ln(b)}}$$

Im Beispiel $f(t) = 2000 \cdot 1{,}842^t = 2000 \cdot e^{0{,}611 \cdot t}$.