## 3. Exponential- und Logarithmusgleichungen

Bei den folgenden Gleichungen wird auf die Angabe der Basis verzichtet, sofern es sich um die gleiche Basis bei allen log-Termen handelt.

### 1. Grundtyp : $b^x = a$

Lösung durch Äquivalenzumformung: $b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b(a)$

Beispiel : $2 \cdot 7^{3x+1} = 50 \Leftrightarrow 7^{3x+1} = 25 \Leftrightarrow 3x+1 = \log_7(25) \Leftrightarrow x = \frac{\log_7(25)-1}{3} \approx 0{,}218$

a) $10^x = 31$ b) $0{,}1^x = 123$ c) $2 \cdot 10^{2x} = 19$ d) $2 \cdot 10^{2x} - 1 = 19$

e) $9^{2x-4} + 20 = 0$ f) $2 - 10^{2x+5} = -5$ g) $3^x \cdot 3^{2x} = 6$ h) $3^x \cdot 3^{2x} = 12$

### 2. Grundtyp: $\log_b(x) = a$

Lösung durch Äquivalenzumformung: $\log_b(x) = a \Leftrightarrow x = b^a$

Beispiel: $\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow 2x-1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 5$

a) $\log_3(2t) = -1$ b) $2\log_3(t) = -1$ c) $2\log_5(x) - 2 = 1 - \log_5(x)$

### 3. Exponentenvergleich: $b^{T1} = b^{T2}$.

Lösung: $b^{T1} = b^{T2} \Leftrightarrow T1 = T2$

Beispiel : $7^{3x+1} = 7^{2x-10} \Leftrightarrow 3x+1 = 2x-10 \Leftrightarrow x = -11$

a) $3^{7x+1} = 3^{-13}$ b) $1{,}2^{-5y} = 1{,}2^{1-4y}$ c) $3^{-u+1} = 9$ d) $0{,}5^{7x} = 2^{-x+10}$

### 4. Argumentvergleich : $\log_b(T_1) = \log_b(T_2)$

Lösung: $\log_b(T_1) = \log_b(T_2) \Leftrightarrow T_1 = T_2$ **Achtung: Nur äquivalent für $T_1, T_2 > 0$ !**

Beispiel: $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 1$

Definitionsmenge : $x - 1 > 0 \wedge x + 1 > 0$ also $D = ]\,1\,;\infty\,[$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-1) = \log_2(2) \Leftrightarrow x^2-1 = 2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

Wegen $D = ]\,1\,;\infty\,[$ : $L = \{\sqrt{3}\}$

a) $\ln(x) + \ln(4) = 2$ b) $3\ln(x) - 5\ln(2) = 1$ c) $\log_2(x) + \log_2(x-2) = 2$

d) $\log_4(x) - \log_4(6-x) = 0{,}5$ e) $\ln(1-x) - \ln(1+x) = -1$ f) $\ln(2x) + \ln(x-3) = 2\ln(x)$

### 5. Logarithmieren: $b_1^{T1} = b_2^{T2}$.

Lösung: $b_1^{T1} = b_2^{T2} \Leftrightarrow \ln(b_1^{T1}) = \ln(b_2^{T2}) \Leftrightarrow T1 \cdot \ln(b_1) = T2 \cdot \ln(b_1)$

Beispiel : $2^{4x+1} = 3^x \Leftrightarrow \ln(2^{4x+1}) = \ln(3^x) \Leftrightarrow (4x-1) \cdot \ln(2) = x \cdot \ln(3)$

$\Leftrightarrow 4x\ln(2) - x\ln(3) = -\ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{-\ln(2)}{4\ln(2)-\ln(3)} = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(\frac{16}{3})}$

a) $2^{x-2} = 5^{x+4}$ b) $4^{2x+1} = 7^{1-3x}$ c) $5 \cdot 2^{4x+3} = 3^{x+1}$

d) $2 \cdot 3^{1-5x} = 6 \cdot 3^{1-4x}$ e) $20 \cdot 3^{10x-5} = 100 \cdot 6^{10-40x}$ f) $2 \cdot 4^{3-x} = 2 \cdot 8^{1-2x}$