Polynome – Vielfachheit von Nullstellen – ...

Verwenden Sie vorzugsweise für Dezimalbrüche echte Brüche, das erleichtert in vielen Fällen das Rechnen.
Zeichnen Sie nach Möglichkeit alle Graphen in das Standard-Koordinatensystem oder benutzen Sie GeoGebra.
Überprüfen Sie die Rechnung anhand der Graphen.

Aufgabe 1

Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_1: x \mapsto -x^3 - 2x^2$, $\quad f_2: x \mapsto -x^3 - 4x$, $\quad f_3: x \mapsto -x^3 + 4x$,

$f_4: x \mapsto -\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - 4x$, $\quad f_5: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 - x^2$, $\quad f_6: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + x^2$,

$f_7: x \mapsto -\frac{1}{64}(x-4)^2 \cdot (x^2 - 2x - 8)$, $\quad f_8: x \mapsto -\frac{1}{64}(x-4)^2 \cdot (x^2 + 2x - 8)$ $\quad f_9: x \mapsto \frac{1}{64}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{4}$

1.1 Untersuchen Sie die Graphen auf Symmetrie.
1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
1.3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen. Geben Sie f in der Linearfaktorzerlegung an.
1.4 Ermitteln Sie mit Hilfe einer Tabelle das Vorzeichenverhalten.
Geben Sie die Wertemenge W_f an. (Ist nicht für alle Graphen exakt möglich.)

Für alle Parameterwerte gilt : $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Gegeben sind die reellen Funktionen $f: x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + kx^3 - 6x^2 + 8x$ und $p: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x$

2.1 Bestimmen Sie k so, dass der Graph G_{fk} an der Stelle $x_0 = 4$ eine Nullstelle besitzt.
Bestimmen Sie <u>für diesen Fall</u> alle Nullstellen von $f_{1,5}$ mit ihren Vielfachheiten. ($k = 1,5$) [6]

Für alle folgenden Aufgaben gilt: k = 1,5.

2.1 Geben Sie den Funktionsterm von f als Produkt von Linearfaktoren an. Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \infty$. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vorzeichentabelle den Bereich, für den $f(x) < 0$ ist. [4]
2.3 Berechnen Sie die Nullstellen von G_p sowie die Koordinaten des Scheitels. Zeichnen Sie G_p. ($x_S = 2$) [6]
2.4 Berechnen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von G_f und G_p. [6]

Aufgabe 3

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{1}{8}x^3 - kx - 2$ und $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x - 2$

3.1 Bestimmen Sie k so, dass der Graph G_{fk} an der Stelle $x_0 = -2$ eine Nullstelle besitzt.
Bestimmen Sie <u>für diesen Fall</u> alle Nullstellen von $f_{1,5}$ mit ihren Vielfachheiten. ($k = 1,5$) [6]

Für alle folgenden Aufgaben gilt: k = 1,5.

3.2 Geben Sie den Funktionsterm von f als Produkt von Linearfaktoren an. Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \infty$. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vorzeichentabelle den Bereich, für den $f(x) < 0$ ist. [4]
3.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g. ($x_{1/2} = \pm 2\sqrt{2}$) . [5]
3.4 Der Graph der linearen Funktion h schneidet den Graphen von $f_{1,5}$ an den Stellen $x_0 = -2$ und auf der y-Achse.
Bestimmen Sie den Funktionsterm h(x) und die Koordinaten aller Schnittpunkte. ($h(x) = -x - 2$; $x_3 = 2$) [5]
3.5.0 Der Graph G_p einer Parabel p schneidet den Graphen G_f bei $x_4 = 4$ und verläuft durch die Punkte $P(-1|\,2,5)$ und $Q(1|\,4,5)$.
3.5.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm der p(x) der Parabel. ($p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$) [6]
3.5.2 Berechnen Sie die Nullstellen von G_p sowie die Koordinaten des Scheitels. Zeichnen Sie G_p. ($x_5 = -2$) [6]
3.5.3 Berechnen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von G_f und G_p. ($x_6 = -6$) [8]
3.6.0 Die Geraden g und h sind Geraden eines Geradenbüschels $b_a(x) = (a + 1)x - 2$.
3.6.1 Bestimmen Sie a_g bzw. a_h jeweils so, dass man die Geraden g bzw. h erhält. [2]
3.6.2 Machen Sie sich anhand der Graphen klar, dass jede der Geraden b_a die Parabel p schneidet.
3.6.3 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für alle a genau zwei Schnittpunkte existieren. [6]